

BLOQUE OBLIGATORIO:

EJERCICIO 1. (2.5 puntos)

Se sabe que la suma de tres números naturales es 22 y que la suma de cuatro veces el primero más el triple del segundo más el doble del tercero es 61. ¿Puede ser 15 uno de los tres números? En caso afirmativo, calcula los restantes. ¿Existen otras opciones?

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 22 \\ 4x + 3y + 2z = 61 \end{array} \right\}$$

$$x = 15 \rightarrow \left. \begin{array}{l} y + z = 7 \\ 3y + 2z = 1 \end{array} \right\} \text{ Imposible, ya que } y, z \text{ son números naturales}$$

$$y = 15 \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + z = 7 \\ 4x + 2z = 16 \end{array} \right\} \rightarrow x = 1, \quad z = 6 \rightarrow (1, 15, 6)$$

$$z = 15 \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 7 \\ 4x + 3y = 31 \end{array} \right\} \rightarrow x = 10, \quad y = -3 \text{ no sirve}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 22 \\ 4x + 3y + 2z = 61 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (-2) \\ -2x - 2y - 2z = -44 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ 4x + 3y + 2z = 61 \end{array} \right\} ; \quad \begin{array}{l} 2x + y = 17 \\ y = 17 - 2x \end{array}$$

$$z = 22 - x - y = 22 - x - 17 + 2x = x + 5 \rightarrow (t, 17 - 2t, t + 5) \quad t \in \mathbb{N}$$

$$17 - 2t \geq 0 \rightarrow 2t \leq 17 \rightarrow t \leq 8.5 \rightarrow t \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq t \leq 8$$

BLOQUE 1:

EJERCICIO 2. (2.5 puntos)

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$. Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \rightarrow x^2 + 2x + 2 \neq 0 \rightarrow \text{raíces complejas}$$

$$F(x) = \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} = \text{arctg}(x+1) + c$$

$$F(0) = \frac{\pi}{4} \rightarrow F(0) = \text{arctg}1 + c = \frac{\pi}{4} + c = \frac{\pi}{4} \rightarrow c = 0$$

$$F(x) = \text{arctg}(x+1)$$

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA - MATEMÁTICAS II - JULIO 2025

BLOQUE 1:

EJERCICIO 3. (2.5 puntos)

Calcula el valor de k para que $\int_1^3 e^{x-k} (x-2) dx = 2$

$$\int (x-2)e^{x-k} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x-2 \quad du = dx \\ v = e^{x-k} \quad dv = e^{x-k} dx \end{array} \right\} = (x-2)e^{x-k} - \int e^{x-k} dx = (x-2)e^{x-k} - e^{x-k} = (x-3)e^{x-k} + c$$

$$\int_1^3 e^{x-k} (x-2) dx = \left[(x-3)e^{x-k} \right]_1^3 = 2e^{1-k} = 2 \rightarrow e^{1-k} = 1 \rightarrow 1-k = 0 \rightarrow k = 1$$

BLOQUE 2:

EJERCICIO 4. (2.5 puntos)

Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 4 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv mx - y - 2z = 5$

- a) [1.5 puntos] Halla m para que r y π sean paralelos.
b) [1 punto] Para $m = -8$, calcula la distancia de la recta r al plano π .

a)

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 4 \end{cases} \quad \pi \equiv mx - y - 2z = 5$$

$$r \parallel \pi \rightarrow \vec{u} \perp \vec{n} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \quad \vec{n} = (m, -1, -2)$$

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = i + j + 2k + k - 2i + j = -i + 2j + 3k \rightarrow \vec{u} = (-1, 2, 3)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = -m - 2 - 6 = 0 \rightarrow m = -8$$

b)

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 4 \end{cases} \quad \pi \equiv 8x + y + 2z + 5 = 0$$

$$x = 0 \rightarrow \begin{cases} -y + z = 3 \\ 2y - z = 4 \end{cases} \rightarrow y = 7, \quad z = 10 \rightarrow P(0, 7, 10) \in r$$

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|7 + 20 + 5|}{\sqrt{64 + 1 + 4}} = \frac{32}{\sqrt{69}} = 3.85 \text{ u}$$

BLOQUE 2:

EJERCICIO 5. (2.5 puntos)

Sean las rectas $r \equiv \frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{-1}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -3 - 2\lambda \end{cases}$

a) [1 punto] Estudia la posición relativa de las rectas r y s .

b) [1.5 puntos] Halla la ecuación de un plano que contiene a r y a una recta perpendicular a las rectas r y s .

a)

$$r \equiv \frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{-1} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -3 - 2\lambda \end{cases}$$
$$r \equiv \begin{cases} A(-1, -2, 2) \\ \vec{u} = (4, 3, -1) \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} B(1, 2, -3) \\ \vec{v} = (-1, 1, -2) \parallel (1, -1, 2) \end{cases} \quad \overrightarrow{AB} = (2, 4, -5)$$
$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 20 + 12 - 4 - 2 - 32 + 15 = 9 \neq 0 \rightarrow \text{se cruzan}$$

b)

$$r \equiv \begin{cases} A(-1, -2, 2) \\ \vec{u} = (4, 3, -1) \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} B(1, 2, -3) \\ \vec{v} = (1, -1, 2) \end{cases}$$

$\vec{w}$ perpendicular a r y a s

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6i - j - 4k - 3k - i - 8j = 5i - 9j - 7k \rightarrow \vec{w} = (-5, 9, 7)$$
$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 3 & -1 \\ -5 & 9 & 7 \end{vmatrix} = 21i + 5j + 36k + 15k + 9i - 28j = 30i - 23j + 51k$$
$$\pi \equiv 30x - 23y + 51z + D = 0, \quad A(-1, -2, 2) \in \pi \rightarrow -30 + 46 + 102 + D = 0$$
$$D = -118 \rightarrow \pi \equiv 30x - 23y + 51z - 118 = 0$$

BLOQUE 3:

EJERCICIO 6. (2.5 puntos)

Calcula a y b sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x + a(e^x - 1) + \operatorname{sen} x}{bx^2 + x - \operatorname{sen} x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x + a(e^x - 1) + \operatorname{sen} x}{bx^2 + x - \operatorname{sen} x} = \frac{0}{0} = L'H = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x + x \cos x + ae^x + \cos x}{2bx + 1 - \cos x} = \frac{a+1}{0} = \frac{0}{0} = L'H =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x - e^x - \operatorname{sen} x}{2b + \operatorname{sen} x} = \frac{2-1}{2b} = \frac{1}{2b} = 1 \rightarrow b = \frac{1}{2}$$

Para que dicho límite sea finito debe cumplirse que $a+1=0 \rightarrow a=-1$

BLOQUE 3:

EJERCICIO 7. (2.5 puntos)

La velocidad máxima a la que puede circular un vehículo sobre un determinado puente del río Guadalete es de 70 km/h.

- a) **[1 punto]** En uno de los sentidos de circulación, la velocidad de los vehículos sigue una distribución normal de media 64 km/h y desviación típica 4 km/h. Si el radar de control salta a partir de 72 km/h, ¿cuál es el porcentaje de vehículos que se sancionan?
- b) **[1.5 puntos]** En el sentido contrario, también sigue una distribución normal de la que sabemos que la velocidad media es de 63.6 km/h y que el 5.05% de todos los vehículos viaja a más de 80 km/h. En este caso, ¿cuánto vale la desviación típica?

a)

$$X \in N(64, 4)$$

$$P(X > 72) = P\left(Z > \frac{72-64}{4}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

El 2.28% de los coches circulan a más de 72 km/h, y serán sancionados

b)

$$X \in N(63.6, \sigma)$$

$$P(X > 80) = 0.0505$$

$$P(X > 80) = P\left(Z > \frac{80-63.6}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{16.4}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{16.4}{\sigma}\right) = 0.0505$$

$$P\left(Z < \frac{16.4}{\sigma}\right) = 0.9495 \rightarrow \frac{16.4}{\sigma} = 1.64 \rightarrow \sigma = 10$$

$$X \in N(63.6, 10)$$