



**Instrucciones:**

- Duración: 1 hora y 30 minutos.
- Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 4 bloques de 2 ejercicios cada uno.
- Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos.
- Se realizará únicamente un ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

**BLOQUE A.** Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

**EJERCICIO 1. (2,5 puntos)**

Sea la función  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \ln(x)$ , donde  $\ln$  denota la función logaritmo neperiano, y los puntos de su gráfica  $A(1, 0)$  y  $B(e, 1)$ .

- [1,5 puntos]** Determina, si existen, los puntos de la gráfica de  $f$  en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta que pasa por los puntos  $A$  y  $B$ .
- [1 punto]** Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de  $f$  en el punto  $A$ .

**EJERCICIO 2. (2,5 puntos)**

Considera la función continua  $f$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \cos(x) - a \operatorname{sen}(x)}{x^3} & \text{si } x < 0 \\ b \cos(x) - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Calcula  $a$  y  $b$ .

**BLOQUE B.** Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

**EJERCICIO 3. (2,5 puntos)**

Considera la función  $f$  definida por  $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1}$ , para  $x \neq -1$ ,  $x \neq 1$ . Calcula una primitiva de  $f$  cuya gráfica pase por el punto  $(0, 1)$ .

**EJERCICIO 4. (2,5 puntos)**

Halla la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f''(x) = x \cos(x)$  y cuya gráfica pasa por los puntos  $(0, \frac{\pi}{2})$  y  $(\pi, 2\pi)$ .



**BLOQUE C.** Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

**EJERCICIO 5. (2,5 puntos)**

Considera la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- a) [1 punto] Calcula  $A^{2024}$ .
- b) [1,5 puntos] Halla la matriz  $X$ , si es posible, que verifica  $A^2XA + I = O$ , donde  $I$  y  $O$  son la matriz identidad y la matriz nula de orden 3, respectivamente.
- 

**EJERCICIO 6. (2,5 puntos)**

Considera el sistema

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ (k-1)x + y + z = k \\ x + (k-1)y + z = 0 \end{cases}$$

- a) [1,75 puntos] Discute el sistema según los valores de  $k$ .
- b) [0,75 puntos] Para  $k = 1$  resuelve el sistema, si es posible. ¿Hay alguna solución en la que  $y = 0$ ? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.
- 

**BLOQUE D.** Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

**EJERCICIO 7. (2,5 puntos)**

- a) [1,25 puntos] Halla el punto simétrico de  $P(2, 2, 1)$  respecto de la recta  $r \equiv \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$
- b) [1,25 puntos] Halla el punto simétrico de  $Q(1, -1, -3)$  respecto del plano  $\pi \equiv x - 2y + z + 6 = 0$ .
- 

**EJERCICIO 8. (2,5 puntos)**

Considera las rectas  $r \equiv \begin{cases} y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$  y  $s \equiv \begin{cases} x + y + 7 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

- a) [1 punto] Estudia la posición relativa de  $r$  y  $s$ .
- b) [1,5 puntos] Calcula la ecuación del plano paralelo a  $r$  y  $s$  que equidista de ambas rectas.
-